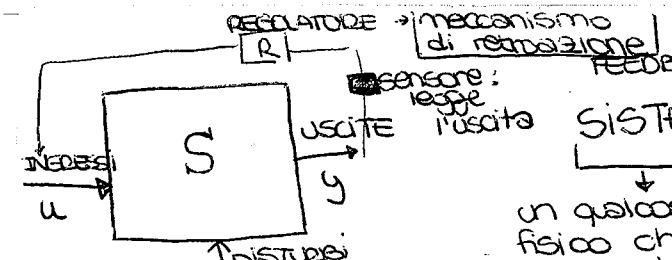
APPUNTI CONTROLLI AUTOMATICI

prof. CAITI

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745



Ingressi = cause esterne controllabili
Uscite = effetti osservabili dall'esterno
Disturbi = cause esterne NON controllabili

SISTEMA DINAMICO

↓ un qualcosa di fisico che può essere delimitato dal resto del mondo fisico, al cui interno possono essere delimitati dei sotto sistemi. Vengono descritti con linguaggio matematico (eq. differenziali non lineari)

↓ Relazione cause - effetti

X STATO DEL SISTEMA: Insieme di variabili (non necessariamente unico) interne al sistema che descrive completamente la dinamica del sistema ad ogni istante di tempo.

↔ Insieme di informazioni necessarie, al tempo t_0 per determinare dato un ingresso o più ingressi, l'evoluzione futura del sistema, ovvero risolvere l'equazione dinamica del sistema.

DINAMICA DEL SISTEMA

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t; \underbrace{x_0, t_0}_{\text{non compaiono esplicitamente}})$$ EQ. DI STATO (differenziale)

$\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ come $\underline{x}$

$\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ → INGRESSI

$\underline{y} \in \mathbb{R}^p$ → USCITE

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ → STATO

- $\underline{h} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{u})$ SISTEMA PROPRIO
- $\underline{h} = \underline{h}(\underline{x})$ SISTEMA STRETTAMENTE PROPRIO.
- $\underline{f} = \underline{f}(\underline{x})$ SISTEMA AUTONOMO

$$\underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)$$ EQ. DI USCITA (algebrica)

$\underline{h} \in \mathbb{R}^p$ come $\underline{y}$

- SISTEMA STAZIONARIO o TEMPO INVARIANTE non dipende esplicitamente dal tempo (stessi ingressi in diversi istanti di tempo danno le stesse uscite) def sia t_0 quanti vecchi

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

- SISTEMA LINEARE (vale la sovrapposizione degli effetti)

$$\dot{\underline{x}} = A(t) \cdot \underline{x}(t) + B(t) \cdot \underline{u}(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

PER UN SISTEMA LINEARE VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO - LTI -

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

→ SISTEMI TEMPOVARIANTI
→ SISTEMI A EVENTI DISCRETI pag 4

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

STATI DI EQUILIBRIO

$\underline{x}_0$ è uno stato di equilibrio per l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$
se $f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t; \underline{x}_0, t_0) = \underline{\emptyset} \quad \forall t \geq t_0$

STABILITÀ ALLA LYAPUNOV o STABILITÀ INTERNA

- STABILE
  $\underline{\bar{x}}$ punto di equilibrio si dice STABILE se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon$ tale che se $\| \underline{x}_0 - \underline{\bar{x}} \| < \delta_\varepsilon$ allora $\| \underline{x}(t) - \underline{\bar{x}} \| < \varepsilon \quad \forall t \geq \emptyset$.

- ASINTOTICAMENTE STABILE
  se è stabile e inoltre $\lim_{t \to +\infty} \| \underline{x}(t) - \underline{\bar{x}} \| = 0$

- INSTABILE

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI (vale per sistemi LINEARI stazionari e non)

Se $x_1(t)$ è l'evoluzione dello stato con ingresso $u_1(t)$ e condizione iniziale x_{10}
e
se $x_2(t)$ è l'evoluzione dello stato con ingresso $u_2(t)$ e condizione iniziale x_{20}

Allora
$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ è l'evoluzione dello stato con ingresso $\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ e condizione iniziale $\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20}$
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

I sistemi non lineari possono essere approssimati a sistemi lineari in un intorno dei pti di equilibrio

LINEARIZZAZIONE DI UN SISTEMA NON LINEARE

dato un sistema stazionario $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$
$\underline{\bar{x}}$ STATO DI EQUILIBRIO per $\underline{u}(t) = \underline{\bar{u}}$
Si può LINEARIZZARE il sistema nell'intorno di $\underline{\bar{x}}$ facendo la serie di Taylor fermandosi al primo ordine

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \simeq \underline{f}(\underline{\bar{x}}, \underline{\bar{u}}) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{\bar{x}} \\ \underline{u}=\underline{\bar{u}}}} \cdot (\underline{x} - \underline{\bar{x}}) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{\bar{x}} \\ \underline{u}=\underline{\bar{u}}}} (\underline{u} - \underline{\bar{u}})$$

$\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{\bar{x}} \qquad \Delta \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$
$\Delta \underline{u} = \underline{u} - \underline{\bar{u}}$

$$\boxed{\Delta \dot{\underline{x}} = A \, \Delta \underline{x} + B \, \Delta \underline{u}}$$

$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{\bar{x}} \\ \underline{u}=\underline{\bar{u}}}}$

$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{\bar{x}} \\ \underline{u}=\underline{\bar{u}}}}$

scostamento delle variabili (non lineari) dallo stato d'equilibrio

MATRICI JACOBIANE

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

DINAMICA SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \ (+D\underline{u}) \end{cases}$$

pag 9

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$

$t_0 = 0$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ cond. iniziale, $\underline{u}(t)$ definito per $t \geq 0$

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau$$

"INTEGRALE DI CONVOLUZIONE"

$e^{At}\underline{x}_0$: EVOLUZIONE LIBERA

$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau$: EVOLUZIONE FORZATA

somma poiché vale la sovrapposizione degli effetti

$f(t)$, $g(t)$ LA CONVOLUZIONE di f con g

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

è lineare e commutativa

$$f * g = g * f = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

e^{At} MATRICE ESPONENZIALE $\in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2}(At^2) + \frac{1}{6}(At^3) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

$$\left\{ \frac{de^{At}}{dt} = A \cdot e^{At} \right\}$$

$$y(t) = C\underline{x}(t) = Ce^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau$$

$Ce^{At}\underline{x}_0$: RISPOSTA LIBERA

$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\, d\tau$: RISPOSTA FORZATA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MATRICI:
1. DIAGONALI
2. DIAGONALIZZABILI
3. SIMILI A UNA MATRICE DI JORDAN

(Com'è fatta e^{At} nella evoluzione libera)

(1) A È DIAGONALE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ AUTOVALORI DI A

$$A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = I + \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}t^3 \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n^3 \end{pmatrix} \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

(2) A È DIAGONALIZZABILE (se ha tutti gli autovalori ?? NO distinti)

A è DIAGONALIZZABILE $\iff \exists\, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile: $A = T^{-1}\Lambda T$ (simili)

$$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T$$

(simili)

MATRICI SIMILI hanno:
- lo stesso polinomio caratteristico $p(A)$
- le stesse radici del $p(A)$ (AUTOVALORI)
- lo stesso polinomio minimo

Essere simili $\leftrightarrow$ Essere la stessa cosa in sistemi di riferimento diversi.